УДК 517.983

А.В. МОРЖАКОВ

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОПЕРАТОРА ОБОБЩЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ В ОДНОМ КЛАССЕ ОДНОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ. 2

Получено интегральное представление оператора обобщенного дифференцирования и интегрирования Гельфонда - Леонтьева в пространстве голоморфных функций в звездной области G.

***Ключевые слова**: мультипликатор, голоморфная функция, оператор обобщенного дифференцирования, оператор обобщенного интегрирования, аналитическое продолжение.*

Введение. В монографии [1] даётся определение оператора обобщенного дифференцирования (ООД) Гельфонда- Леонтьева для функций, аналитических в начале координат. Там же получено представление ООД в случае круга с центром в нуле. В работе [2] получено представление линейного оператора, который непрерывен в каждом $H(G)$, где $0 \in G$, и в некоторой окрестности нуля он представим в виде оператора обобщенного дифференцирования. В настоящей работе представление такого же вида установлено при более слабых ограничениях на оператор и для фиксированной звездной области $G \subset C$ с ограниченным мультипликатором $M(G) := \{z \in C : zG \subseteq G\}$. По методам и постановке задачи данная статья является продолжением работы [3], в которой получено представление ООД для класса областей, не содержащих 0.

Основные результаты. Назовём последовательность множеств A_n исчерпывающей множество A, если $\forall n$ из множества натуральных чисел $\overline{A_n} \subset \operatorname{int} A_{n+1}$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A.$

ЛЕММА 1. 1) Пусть G - звездная (относительно нуля) область. Тогда, если $\{K_n\}$ - исчерпывающая G последовательность компактов и $0 \in \operatorname{int} K_n$, то существует исчерпывающая G последовательность звездных компактов $\{K_n^*\}$, $0 \in \operatorname{int} K_n^*$.

2) Если $G_n = \operatorname{int} K_n^*$, то G_n - исчерпывающая G последовательность звездных областей.

Доказательство. 1. Покажем, что произвольный компакт K_n можно достроить до звездного. На каждом луче выделим наименьший отрезок с началом в нуле, принадлежащий одновременно этому лучу и K_n. Составленное из этих отрезков множество K_n^* является по построению наименьшим звездным компактом, содержащим K_n.

Покажем, что $\forall n$ из множества натуральных чисел $K_n^* \subset \operatorname{int} K_{n+1}^*$. Для этого достаточно доказать, что концевые точки отрезков, составляю-

щих K_n^*, лежат внутри K_{n+1}^*. По построению K_n^* каждая такая точка из K_n^* принадлежит множеству K_n, и поэтому является внутренней точкой K_{n+1}, а значит и K_{n+1}^*. Так как G - звёздно и $\forall n \in N \quad K_n \subset G,$ то по построению $K_n^* \quad \forall n$ из множества натуральных чисел $K_n^* \subset G.$ А так как

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} K^*{}_n \subset G,$$

получаем, что $\bigcup_{n=1}^{\infty} K^*{}_n = G.$

2. Допустим, что $z \in G.$ Тогда существует натуральное n такое, что $z \in K_{n-1}^* \subset \operatorname{int} K_n^* =: G_n.$ Следовательно, $\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = G.$ А так как $K_n^* \subset \operatorname{int} K_{n+1}^* = G_{n+1},$ то $G_n \subset K_n^* \subset G_{n+1}.$ Что и требовалось доказать.

Замечание. Далее будем считать, что $\{G_n\}$ - последовательность звездных областей, исчерпывающая G. Она обладает тем свойством, что для любого компакта $K \subset G \quad \exists n$ из множества натуральных чисел такое, что $K \subset G_n$.

ЛЕММА 2. 1) Для любой звездной области $G \neq C,\ 0 \in G$ множество $G \cdot G'^{-1}$ - открыто, звездно и не содержит бесконечно удаленную точку.

2) Если $M(G)$ ограничен, то $\forall n$ из множества натуральных чисел $\exists N = N(n) \quad G_n \cdot G_N'^{-1} \subset G \cdot G'^{-1}.$

3) $\forall z \in GG'^{-1} \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall N \quad [0,z] \subset G_n G_N'^{-1}.$

Доказательство. 1. В силу предыдущего замечания $G \cdot G'^{-1}$ звёздно. Так как множество G'^{-1} ограничено, то $\{\infty\} \notin G \cdot G'^{-1}$. В силу теоремы 1 [4] и того, что $0 \in \operatorname{int} GG'^{-1}$ множество

$$M(G) \cup \{0, \infty\} = M(G) \cup \{\infty\} = \left(GG'^{-1}\right)'^{-1} \cup \{\infty\}$$

замкнуто, а, следовательно, GG'^{-1} открыто.

2. Так как $G \cdot M(G) \subseteq G,$ то $K_n M(G) \subset G.$ Покажем, что $K_n M(G)$ компакт. Зафиксируем произвольную последовательность $z_k \in K_n M(G).$ Без ограничения общности можно сказать, что существуют последовательности $z_k^{(1)} \in K_n$ и $z_k^{(2)} \in M(G)$, $z_k^{(1)} \to z_1 \in K_n,$ $z_k^{(2)} \to z_2 \in M(G)$ такие, что $z_k = z_k^{(1)} z_k^{(2)}.$ Но тогда и $z_k \to z = z_1 z_2 \in K_n M(G).$ Следовательно, $K_n M(G)$ компакт.

В силу того, что $K_n M(G)$ компакт, получаем

$$\exists N = N(n) \quad G_n M(G) \subset K_n M(G) \subset G_N.$$

Следовательно, $M(G) \subset M(G_n, G_N)$, и по теореме 1 [4] $G_n G_N'^{-1} \subset GG'^{-1}.$

3. Заметим, так как G_n - звездная относительно нуля область, то $G_n G_N'^{-1}$ звездно. Поэтому $\forall z \in G_n G_N'^{-1} \ \left[0, z\right] \subset G_n G_N'^{-1}.$ Для любого $z \in GG'^{-1}$

$\exists z_1 \in G, \ \exists z_2 \in G'^{-1} \quad z = z_1 z_2$ и в силу того, что $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$, получаем, что $\exists n_0: \ z_1 \in G_{n_0}; \ \forall N \quad z_2 \in G'^{-1} \subset G_N'^{-1}$. Таким образом, $\forall z \in GG'^{-1} \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall N$ $[0, z] \subset G_n G_N'^{-1}$. Что и требовалось доказать.

Замечание. Если G - звездная область, то замкнутое множество G'^{-1} тоже звёздно.

Действительно, в работе [4] доказано следующее утверждение : G звёздно относительно нуля тогда и только тогда, когда $[0,1] \subseteq M(G)$. Очевидно, что это утверждение справедливо и для любого звездного множества из C. По теореме 2 [4] $M(G) = M(G'^{-1})$. Откуда следует, что G'^{-1} звездное замкнутое множество.

ЛЕММА 3. Если G - звездная (относительно нуля) область, то $M(G)$ не ограничен $\Leftrightarrow$ $G = C$.

Доказательство. Необходимость. Для начала покажем, что для некоторого $\varphi_0 \in R$ луч $\left[0, e^{i\varphi_0}\infty\right) \subseteq M(G)$. В силу того, что $M(G)$ не ограничен, $\exists \{z_n\} \in M(G)$: $\lim |z_n| = \infty$ и $\lim(\arg z_n) = \varphi_0$. Так как по теореме 1 [4] $M(G) \cup \{0, \infty\}$ замкнут, то остается показать, что $\forall z \in \left(0, e^{i\varphi_0}\infty\right) \quad \forall \varepsilon > 0$ $D(z, \varepsilon) \cap M(G) \neq \varnothing$. Так как $|z_n| \to \infty$, $\arg z_n \to \varphi_0$, то $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \ \ \forall n > N$ $|\arg z_n - \varphi_0| < \dfrac{\varepsilon}{|z|}$, а значит $D(z,.\varepsilon)$ содержит точки из $[0, z_n] \subset M(G)$. Следовательно, $z \in \left[0, e^{i\varphi_0}\infty\right)$ - предельная точка $M(G)$, а поэтому $\left[0, e^{i\varphi_0}\infty\right) \subseteq M(G)$.

Если $\dfrac{\varphi_0}{2\pi}$ иррационально, то в силу теоремы 3 [4] $D(0,1) \subseteq M(G)$, откуда $C = D(0,1) \cdot \left[0, e^{i\varphi_0}\infty\right) = M(G)$. Если же $\dfrac{\varphi_0}{2\pi} = \dfrac{m}{n}$ рациональное число, то $\varphi_0 n = 2\pi m$ и $[0, +\infty) \subseteq M(G)$. В обоих случаях по теореме 3 [4] $G = C$.

Достаточность очевидна в силу теоремы 3 [4]. Что и требовалось доказать.

Замечание. В силу леммы 3 в следующей теореме считаем, что $M(G)$ ограничен. Случай, когда $M(G)$ не ограничен, т.е. $G = C$ рассмотрен в [1].

Определение 1. Оператор D, определенный на пространстве многочленов по правилу $Dz^n = d_{n-1} z^{n-1}$, где n из множества натуральных чисел, $D1 := 0$, назовём оператором обобщенного дифференцирования.

Определение 2. Пусть $\forall n$ из множества натуральных чисел $d_n \neq 0$. Тогда оператор I, определенный на пространстве многочленов со свойством

$Iz^n = \frac{1}{d_n} z^{n+1}, \quad n = 0,1,2\ldots$ назовём оператором обобщенного интегрирования.

ТЕОРЕМА. Пусть G - звездная относительно нуля область в C, $G \neq C$.

1) Оператор D расширяется до непрерывного на $H(G)$ ООД тогда и только тогда, когда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} d_n z^n$ сходится в окрестности начала координат, и его сумма $d(z)$ аналитически продолжается в звездную область GG'^{-1}. Этот оператор можно представить в виде

$$[Dy](z) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{y(t)}{t^2} d\left(\frac{z}{t}\right) \mathrm{d}t, \qquad (1),$$

где c - спрямляемый контур в области G, зависящий от точки z.

2) Для того чтобы существовал непрерывный линейный правый обратный оператор I к непрерывному ООД D в $H(G)$ необходимо и достаточно, чтобы ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{d_n}$ сходился в окрестности начала координат, и его сумма $d_1(z)$ аналитически продолжалась в звездную область $G \cdot G'^{-1}$. В этом случае он имеет интегральное представление

$$[Iy](z) := \frac{1}{2\pi i} \int_c y(t) d_1\left(\frac{z}{t}\right) \mathrm{d}t.$$

Доказательство. Предварительно докажем два вспомогательных результата.

а) Напомним [5] интегральное представление непрерывного в $H(G)$ линейного оператора L. Пусть $\{G_n\}$ исчерпывает G. Тогда существуют такая подпоследовательность натуральных чисел $\{N = N(n)\}$ и голоморфная на каждой бицилиндрической области $G_n \times G'_{N(n)}$ функция $k(z,t)$, что

$$\forall y(z) \in H(G) \ \ \forall z \in G_n \ \ [Ly](z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G_N} y(t) k(z,t) \mathrm{d}t,$$

где ∂G_N – граница G_N.

Получим теперь локальное представление ядра $k(z,t)$ линейного непрерывного в $H(G)$ ООД, следуя схеме статьи [6]. Так как $k(z,t)$ голоморфно в некоторой полной области Гартогса $G_n \times D(\infty, R)$, где $D(\infty, R) := \{z \in \overline{C} : |z| > R\}$, то оно представимо в этой области в виде суммы ряда Гартогса $k(z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k_n(z)}{t^{n+1}}$, где $k_n(z)$ голоморфна в $H(G)$, и ряд

равномерно сходится по t внутри $D(\infty, R)$ [7. С. 48]. Тогда $\forall n \geq 0$ $\left[Dt^n\right](z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=R} t^n k(z,t)\mathrm{d}t = k_n(z) = d_{n-1}z^{n-1}$. Следовательно,

$$k(z,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{d_{n-1}z^{n-1}}{t^{n+1}} = \frac{1}{t^2}\sum_{n=0}^{\infty} d_{n-1}\left(\frac{z}{t}\right)^{n-1} =: \frac{1}{t^2}d\left(\frac{z}{t}\right).$$

Отсюда, в частности, следует, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} d_n\varsigma^n$ сходится в окрестности нуля, и его сумма $d(\varsigma)$ голоморфна в этой окрестности.

б) Теперь покажем, что звездное множество $G_n G_N'^{-1} \subset C$ является областью, и функция $d(\varsigma)$ продолжается в эту область до голоморфной функции. Для этого достаточно показать открытость. Очевидно 0 - внутренняя точка $G_n G_N'^{-1}$. Если $z \neq 0,$ $z \in G_n G_N'^{-1}$ то $\exists z_1, z_2 \neq 0$ $z_1 \in G_n,$ $z_2 \in G_N'^{-1},$ $z_1 z_2 = z.$ $\exists \varepsilon > 0$ $D(z_1, \varepsilon) \subset G_n.$ Таким образом, $D(z, \varepsilon|z_2|) = D(z_1, \varepsilon)\cdot z_2 \subset G_n G_N'^{-1}$. Следовательно, $G_n G_N'^{-1}$ открыто, а значит является звёздной областью.

1. Необходимость. Так как $d(\varsigma)$ голоморфна в $\varsigma = 0,$ то для её голоморфности в звёздной $G\,G'^{-1}$ в силу леммы 2 достаточно показать, что $d(\varsigma)$ аналитически продолжается в любую точку $\varsigma_0 \in G_n G_N'^{-1}$ по отрезку $[0, \varsigma_0]$ [8. С.492].

$$\exists z_0 \in G_n,\ \ t_0 \in G_N'\ \ \varsigma_0 = \frac{z_0}{t_0}.\ \ [0, \varsigma_0] = \left[\frac{z_0}{\infty}, \frac{z_0}{t_0}\right] \subset z_0 G_N'$$

в силу звёздности. Положим $\varsigma := \frac{z_0}{t}.$

Так как $k(z_0, t)$ голоморфна по t на G_N', то $t^2 k(z_0, t) = d\left(\frac{z_0}{t}\right) \in H(G_N').$ Следовательно, $d(\varsigma) = \frac{z_0^2}{\varsigma^2}k\left(z_0, \frac{z_0}{\varsigma}\right)$ голоморфна по переменной ς на $z_0 G_N'^{-1}.$ Поэтому функция $\frac{z_0^2}{\varsigma^2}k\left(z_0, \frac{z_0}{\varsigma}\right)$ дает аналитическое продолжение $d(\varsigma)$ из $\varsigma = 0$ в точку ς_0. Следовательно, функция $d(\varsigma)$ аналитически продолжается в $G \cdot G'^{-1}.$

Достаточность. Пусть $d(\varsigma)$ голоморфна в GG'^{-1}. По лемме 2 для любого натурального n $\exists N = N(n)$ $G_n \cdot G_N'^{-1} \subset G \cdot G'^{-1}.$ На каждой бицилиндрической области $G_n \times G_N'$ определим голоморфную функцию двух переменных по формуле $k(z,t) := \frac{1}{t^2}d\left(\frac{z}{t}\right).$ Функция с таким свойством в силу [8] определяет линейный непрерывный в $H(G)$ оператор по формуле $\forall z \in G_n$

$$[Ly](z) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G_N} y(t)\frac{1}{t^2}d\left(\frac{z}{t}\right)\mathrm{d}t.$$

Так как

$$\left[Dt^n\right](z) := \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=R} t^n\frac{1}{t^2}\sum_{k=0}^{\infty} d_k\left(\frac{z}{t}\right)^k \mathrm{d}t = d_{n-1}z^{n-1}, \quad n\in\mathbb{N},\ [D1](z)=0,$$

то D является по определению оператором обобщенного дифференцирования.

2. Необходимость. Используя метод пункта а), получаем для любого натурального $n \ge 0$ $[It^n](z) = \dfrac{z^{n+1}}{d_n}$ и

$$k(z,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n+1}}{d_n t^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{d_n}\left(\frac{z}{t}\right)^{n+1} =: d_1\left(\frac{z}{t}\right)$$ для t в окрестности ∞.

Отсюда, в частности, следует, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{d_n}\varsigma^n$ сходится в окрестности нуля, и его сумма $d_1(\varsigma)$ голоморфна в этой окрестности.

Далее, рассуждая как в предыдущем пункте, получаем, что функция $d(\varsigma)$ аналитически продолжается в звездную область $G\cdot G'^{-1}$.

Достаточность. Аналогично предыдущему пункту получаем, что функция со свойством $k(z,t) := d_1\left(\frac{z}{t}\right)$ в силу [5] определяет линейный непрерывный в $H(G)$ оператор по формуле

$$\forall z\in G_n \ [Iy](z) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G_N} y(t)d_1\left(\frac{z}{t}\right)\mathrm{d}t.$$

Так как

$$[It^n](z) := \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=R} t^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{d_k}\left(\frac{z}{t}\right)^{k+1}\mathrm{d}t = \frac{1}{d_n}z^{n+1},\ n\in N$$

то I является по определению оператором обобщенного интегрирования. Что и требовалось доказать.

СЛЕДСТВИЕ. Если $G = D(z_0, R),$ где $|z_0| < R,$ то GG'^{-1} является звёздной невыпуклой областью $\{z : |z_0||z-1| + R > R|z_0|\}$, границей которой является овал Декарта.

Доказательство. Так как в силу теоремы 1 [4] $GG'^{-1} = (M(G))'^{-1}$, сначала найдем $M(D(z_0,R)),\ |z_0| < R.$ Заметим, что в силу той же теоремы

$$M(D(z_0,R_1),D(z_0,R_2)) = M\left(z_0D\left(1,\frac{R_1}{|z_0|}\right), z_0D\left(1,\frac{R_2}{|z_0|}\right)\right) = M(D(1,\rho_1),D(1,\rho_2)),$$

где $\rho_1 := \dfrac{R_1}{|z_0|},\ \ \rho_2 := \dfrac{R_2}{|z_0|}.$

Точка $t \in M\left(D(1,\rho_1), D(1,\rho_2)\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow tD(1,\rho_1) \subseteq D(1,\rho_2) \Leftrightarrow D(t,\rho_1|t|) \subseteq D(1,\rho_2) \Leftrightarrow |t-1| + \rho_1|t| \le \rho_2$$

Следовательно, $M\left(D(z_0,R)\right) = \left\{ z \in C : |z-1| + \frac{R}{z_0}|z| \le \frac{R}{z_0} \right\}$,

но тогда

$$D(z_0,R) \cdot D(z_0,R)^{\prime -1} = \left(M\left(D(z_0,R)\right)\right)^{\prime -1} = \left\{ w \in C : |z_0|\left|\frac{1}{w} - 1\right| + R\left|\frac{1}{w}\right| > R \right\} =$$

$$= \left\{ w \in C : |z_0||w-1| + R > R|w| \right\}.$$

Последнее множество есть звездная невыпуклая область, границей которой является овал Декарта [9. С.135-140]. Что и требовалось доказать.

Библиографический список

1. Леонтьев А. Ф. Обобщенные ряды экспонент. - М.: Наука, 1981. - 320 с.
2. Коробейник Ю. Ф. Об операторах обобщенного дифференцирования, применимых к любой аналитической функции. // ИАН СССР. - 1964. - Т.28. - №4. - С.833-854.
3. Братищев А. В., Моржаков А. В. Представление оператора обобщенного дифференцирования в одном классе односвязных областей // Вестник ДГТУ. – 2005. - Т.5. - №4. – С. 81-90.
4. Братищев А. В., Моржаков А. В. О мультипликаторе пары множеств комплексной плоскости // Вестник ДГТУ. – 2004. – Т.4. - №3. – С.270-281.
5. Köthe G. Dualitat in der Funktionentheorie // J. reine angew. math. – 1953.- Bd. 191. – S. 30-49.
6. Моржаков А. В. О представлении оператора обобщенного дифференцирования функций, аналитических в круге.// Межвуз. сб.«Интегро-дифференциальные операторы и их свойства».– Вып. 6. – Ростов н/Д: Издательский центр ДГТУ, 2004. - С.40-42.
7. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Т.2. Изд.2. - М: Наука, 1976. - 400 с.
8. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. Т.1. – М.: Наука, 1967. – 488 с.
9. Савёлов А. А. Плоские кривые. – М.: ГИФМЛ, 1960. – 296 с.

Материал поступил в редакцию 06.02.06.

A.V. MORZHAKOV

THE REPRESENTATION OF THE GENERALIZED DIFFERENTIAL OPERATOR IN SOME CLASS OF THE STAR SHAPED DOMAIN

The author have got an integral representation of the Gel'fond – Leont'ev generalized differential and integral operators in the space of analytic functions in the star shaped with respect to the zero domain.

МОРЖАКОВ Антон Владимирович (1980), аспирант кафедры «Высшая математика» Донского государственного технического университета. Окончил магистратуру механико-математического факультета РГУ (2003).
Автор 3 научных публикаций.